

CHUYÊN ĐỀ 1 – PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Định lý bổ sung:

+ Đa thức $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước của a_0 , có nghiệm hữu tỉ p/q thì p là ước của hệ số tự do a_0 , q là ước dương của hệ số cao nhất a_n .

+ Đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = a$ thì $f(x)$ có một nhân tử là $x - a$

+ Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì $f(x)$ có một nhân tử là $x - 1$

+ Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì $f(x)$ có một nhân tử là $x + 1$

+ Nếu a là nghiệm nguyên của $f(x)$ và $f(1)$; $f(-1)$ khác 0 thì $\frac{f(1)}{a-1}$ và $\frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên. Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do.

Một số HĐT đáng nhớ mở rộng:

$$1. (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$2. (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$3. a^4 - b^4 = (a+b)(a-b) \left[(a+b)^2 - 2ab \right]$$

$$4. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$5. a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

$$6. a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

Ngoài những phương pháp đã học trong SGK ta cần chú ý những phương pháp sau:

I. Phương pháp nhẩm nghiệm và tách

1.1. Dạng bậc hai $ax^2 + bx + c$

- $x^2 + x - 12$
- $3x^2 - 8x + 4$
- $8x^2 + 10x - 12$
- $6x^2 - x - 1$
- $x^2 - 4x - 12$

1.2. Dạng từ bậc 3 trở lên

- $x^3 - x^2 - 4$
- $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$
- $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$
- $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2$
- $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$
- $x^2 - x - 2001 \cdot 2002$
- $a^3 + 4a^2 - 29a + 24$
- $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

II. THÊM, BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ:

- $4x^4 + 81$
- $x^8 + 98x^4 + 1$
- $x^7 + x^2 + 1$
- $x^7 + x^5 + 1$

Ghi nhớ:

Các đa thức có dạng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ như: $x^7 + x^2 + 1$; $x^7 + x^5 + 1$; $x^8 + x^4 + 1$; $x^5 + x + 1$; $x^8 + x + 1$; ... đều có nhân tử chung là $x^2 + x + 1$

III. ĐẶT BIẾN PHỤ:

- $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$
- $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ (dạng đối xứng)

BÀI TẬP

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$
- $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$
- $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

Bài 2:

- $x^2 + 7x + 12$
 - $x^4 + 5x^2 - 6$
 - $x^2 - 5xy + 6y^2$
- $3x^2 - 8x + 5$
 - $x^4 - 34x^2 + 225$
 - $4x^2 - 17xy + 13y^2$

Bài 3:

- $4x^4 + 81$
 - $64x^4 + y^4$
- $x^4 + 1$
 - $x^2 + x = 6$

Bài 4:

- $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
- $x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1$

Bài 5:

- $x^5 + x + 1$
- $x^8 + x^4 + 1$

Bài 6:

- $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35$
 - $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 16$
 - $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$
- $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$
 - $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- $x^3 - 7x + 6$
- $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$
- $x^3 - 6x^2 - x + 30$
- $2x^3 - x^2 + 5x + 3$
- $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$
- $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$
- $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$
- $4x^4 - 32x^2 + 1$
- $64x^4 + y^4$
- $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$
- $x^3 + 3xy + y^3 - 1$
- $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$
- $x^8 + x + 1$
- $x^8 + 3x^4 + 4$
- $3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 + 10$
- $x^4 - 8x + 63$

Bài 8 : Cho biểu thức: $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

a, Phân tích A thành nhân tử

b, Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì $A < 0$

Bài 9: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

- $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1$
- $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1$
- $x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3$
- $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$
- $(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - 4b^2$

6. $a(b^2 - c^2) - b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$
7. $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(x + z) + 3xyz$
8. $xy(x + y) - yz(y + z) - zx(z - x)$
9. $x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$
10. $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$
11. $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3$
12. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$
13. $x(y^3 - z^3) + y(z^3 - x^3) + z(x^3 - y^3)$
14. $(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$
15. $2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$
16. $-c^2(a - b) + b^2(a - c) - a^2(b - c)$
17. $(x - y)z^3 + (y - z)x^3 + (z - x)y^3$
18. $ab(a + b) - bc(b + c) - ac(c - a)$
19. $(x - y) - x^3(1 - y) + y^3(1 - x)$
20. $4a^2b^2(2a + b) + b^2c^2(c - b) - 4c^2a^2(2a + c)$
21. $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$
22. $bc(a + d)(b - c) - ac(b + d)(a - c) + ab(c + d)(a - b)$
23. $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$
24. $a(b + c)^2 + b(a + c)^2 + c(a + b)^2 - 4abc$
25. $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$
26. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
27. $abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c - 1)$
28. $x^2y + xy^2 + xz^2 + yz^2 + x^2z + y^2z + 2xyz$